L'Implication Matérielle et L'Implication Logique.

I

La logique classique n'a réussi à systématiser, d'une manière satisfaisante, ni un groupe suffisamment vaste de propositions logiquement vraies, ni un ensemble suffisamment étendu de procédés d'inférence pouvant être appliqués au cours d'un raisonnement déductif.

Cet échec est dû au fait qu'on se sert, dans la logique classique, de l'opérateur de l'implication matérielle, lequel ne correspond que d'une façon approximative à l'expression « si, alors ».

En effet, on y définit (ou on peut y définir) les formules de la forme

a implique matériellement b

(en symboles,

$$a \supset b)$$

par

non (a et non b)

(en symboles,

$$- (a \,.\, - b)).$$

Mais en définissant de la sorte

$$a \supset b,$$

on ne capte aucunement l'élément essentiel des diverses significations que prend la locution « si, alors ».

Ceci résulte de l'existence d'énoncés de la forme

Si A, alors B

qui ne sont pas logiquement équivalents à

non (A et non B).

Les propositions

(1) : Si cette barre de métal a été soumise à l'action de la chaleur, alors cette barre de métal s'est dilatée

et

(2) : Il est faux que cette barre de métal ait été soumise à l'action de la chaleur et que cette barre de métal ne se soit pas dilatée

sont déductibles l'une à partir de l'autre et sont par conséquent logiquement équivalentes entre elles. Mais il n'en est pas de même des énoncés

(3) : Il est faux que 1 soit identique à 2 et que 1 soit différent de 1

et

(4) : Si 1 est identique à 2, alors 1 est identique à 1 :

la proposition (3) n'implique pas logiquement l'énoncé (4).

La différence est très nette entre l'opérateur de l'implication matérielle et l'expression « si, alors » qui figure dans les propositions hypothétiques du langage naturel, des sciences mathématiques et des sciences empiriques.

Il suit immédiatement de ceci que parmi les lois de la logique classique, il en est qui ne sont pas valables lorsqu'on interprète le symbole de l'implication matérielle qu'elles contiennent par

si, alors.

Tel est le cas, notamment, de la loi suivante :

(L) $— (p \supset q) \supset (p. — q).$

Supposons en effet que la valeur de vérité de l'énoncé

(5) : Cette barre de métal sera soumise à l'action de la chaleur

ne soit pas connue. Dans ce cas, celle de la proposition

(6) : Cette barre de métal sera soumise à l'action de la chaleur et ne se transformera pas en papier

ne l'est pas davantage.

La négation de l'énoncé hypothétique

(7) : Si cette barre de métal est soumise à l'action de la chaleur, cette barre de métal se transformera en papier

est vraie. C'est pourquoi, il ne fait aucun doute que la proposition (6) ne puisse pas être considérée comme une conséquence logique de l'énoncé (7).

Or, si l'on substitue dans (L) la proposition (5) à la variable p et l'énoncé

(5) : Cette barre de métal se transformera en papier

à la variable q et si l'on interprète l'opérateur $\supset$ par «si, alors», on obtient la proposition

(8) : Si non (7), alors (6)

qui est fausse.

On voit donc que la logique classique ne systématise pas d'une manière satisfaisante les énoncés logiquement vrais dans lesquels figure la locution « si, alors ».

La logique classique ne permet pas non plus de caractériser d'une façon correcte les procédés d'inférence déductive. La concordance entre la notion de « déductibilité », telle qu'elle y est ordinairement définie, et la notion usuelle de « déductibilité » ou de « conséquence logique » est loin d'être parfaite.

Ainsi, la formule

$$q \vee - q \text{ (1)}$$

est déductible dans le calcul des propositions à partir de la formule

$$p.$$

Mais parmi les procédés d'inférence déductive qui sont effectivement appliqués, il n'en est aucun qui permette de dériver, à partir d'une proposition A, n'importe quel énoncé de la forme

B ou non B.

Il n'est nul procédé d'inférence qui autorise la déduction de la proposition

$$2 = 2 \text{ ou } 2 \neq 2$$

à partir de l'énoncé

$$1 = 1.$$

Il serait tout à fait illégitime, on le voit, de recourir à la notion de « déductibilité » dont on se sert dans la logique classique pour délimiter ou pour caractériser l'ensemble des procédés d'inférence communément appliqués (2).

II

L'une des tentatives les plus importantes qui aient été faites jusqu'à présent pour systématiser un groupe assez riche de propositions logiquement vraies et de procédés de déduction, est due à A. R. Anderson et à N. D. Belnap (3).

(1) Le signe « v » est l'opérateur de la disjonction.

(2) Pour une étude plus détaillée des rapports entre l'opérateur de l'implication matérielle et l'expression « si, alors », voir N. D. Belnap « A formal analysis of entailment », Technical Report nº 7, Office of Naval Research, Group Psychology Branch, Contract No. SAR/Nonr - 609, New Haven, 1960, et A. R. Anderson et N. D. Belnap « The pure calculus of entailment », The Journal of Symbolic Logic, v. 27, 1962, p. 19-52.

(3) Cf. N. D. Belnap « A formal analysis of entailment », op. c., A. R. Anderson et N. D. Belnap « Tautological entailments », Philosophical Studies, v. 13, 1962, p. 9-24

Ces auteurs ont proposé deux systèmes, E (4) et EQ : le premier est un calcul propositionnel et le second le système E avec quantification.

Les opérateurs du système E sont les opérateurs

$$. \ , \ \vee \ , \ -$$

du calcul classique des propositions et l'opérateur de l'implication logique

$$---) \ .$$

Le signe « ---) » figure à la place de l'expression « si, alors » lorsqu'elle est utilisée pour établir un lien de nécessité logique entre deux énoncés.

Une formule du système E telle que

$$p \ ---) \ q$$

peut être interprétée par

p implique logiquement q (5)

ou par

De p, il suit logiquement que q.

Le système E est équivalent à un système de déduction naturelle, que nous dénommerons « système E′ » (6). Le système E′ est lui-même une variante d'un système de déduction naturelle qui est dû à F. B. Fitch (7).

Une des particularités du système E′ réside dans le fait que les preuves qui y sont autorisées sont assez proches des démonstrations que l'on effectue dans une théorie mathématique ordinaire.

On peut présenter comme suit l'un des traits essentiels qui distinguent le système E′ d'un système de déduction naturelle classique :

Supposons que la formule

$$c$$

ait été dérivée à partir des formules

$$a \text{ et } b.$$

Dans un système classique, il est permis de traiter

$$b \supset c$$

comme une formule déduite à partir de la formule a, que la prémisse b ait été utilisée ou non dans l'inférence de c à partir de a et de b.

et A. R. Anderson « Completeness theorems for the systems E of entailment and EQ of entailment with quantification », Technical Report nº 6, Office of Naval Research, Group Psychology Branch, Contract SAR/Nonr — 609, New Haven, 1959 et Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, v. 6, 1959, p. 201-216.

(4) « E » pour « Entailment », terme que nous traduisons par « implication logique ».

(5) Nous écrirons « p l- imp q ».

(6) L'ensemble des théorèmes du système E est identique à l'ensemble des théorèmes du système E'.

(7) Voir « Symbolic logic », The Ronald Press Company, New York, 1952.

De plus, la formule

$$b \supset c$$

ayant été dérivée de la sorte à partir de a, la formule

$$a \supset (b \supset c)$$

peut être considérée comme démontrée, même si la prémisse a n'a joué aucun rôle dans l'inférence initiale de c à partir de a et de b.

Par contre, dans le système E′, la formule

$$a \dashrightarrow (b \dashrightarrow c)$$

n'est prouvée, au terme de la déduction de c à partir de a et de b, que si, notamment, la condition suivante est satisfaite :

> Les deux prémisses, a et b, ont été effectivement utilisées au cours de l'inférence de c.

Cette condition constitue en fait une restriction fondamentale imposée à l'application de la règle de déduction ordinairement dénommée « règle d'introduction de l'opérateur de l'implication ».

Restreindre d'une telle façon l'application de la règle d'introduction du symbole de l'implication nous semble parfaitement justifié. En effet, on ne traitera pas une proposition qui a la forme

> C suit logiquement de B

ou la forme

> Si B, alors C

comme une conséquence logique d'un énoncé A si, après avoir supposé vraies successivement la proposition A et la proposition B, on effectue une inférence de C au cours de laquelle on ne recourt pas à chacune des deux prémisses A et B.

Ainsi, on ne démontrera pas un énoncé tel que

> De ce que x est premier, il suit logiquement que si x est pair, x est premier

en procédant comme suit :

> Supposons que x soit premier.
> Supposons en outre que x soit pair.
> En vertu de la première hypothèse, x est premier ; donc, de ce que x est premier, il suit nécessairement que si x est pair, x est premier.

Mais ce que nous voudrions prouver, c'est que la condition dont il est question ci-dessus n'est pas suffisante.

La formule qui suit est un théorème du système E′ :

$$(1) \qquad (p \dashrightarrow q) \dashrightarrow ((q \dashrightarrow p) \dashrightarrow (p \dashrightarrow q)).$$

Substituons dans (1) une proposition de la forme

A et B

à la variable p et l'énoncé B à la variable q. On obtient de la sorte la proposition

(2) : (A et B l-imp B) l-imp ((B l-imp A et B) l-imp (A et B l-imp B)).

L'antécédant de l'énoncé (2) est vrai (B est une conséquence logique de A et B). Mais son conséquent ne l'est pas. Que

B suive logiquement de A et B

ne résulte aucunement de ce que

B l-imp A et B.

Dans le système E', on démontre la formule (1) en effectuant une inférence

de q à partir des formules p ---) q, q ---) p et p

au moyen de la règle du modus ponens ; au cours de cette inférence, on se sert de chacune des trois prémisses

p ---) q, q ---) p et p.

Or, pour dériver q à partir de ces formules, il n'est nullement indispensable de recourir à

q ---) p.

Il suffit d'utiliser les prémisses

p ---) q et p

et d'appliquer (à une seule reprise) la règle du modus ponens.

Le caractère incorrect de la démonstration de la formule (1) qui peut être effectuée dans le système E′ est dû au fait qu'une *partie* de cette preuve consiste en une déduction

de p à partir des prémisses p ---) q, q ---) p et p,

c'est-à-dire d'une formule (p) à partir d'une suite de formules (p ---) q, q ---) p, p) dont p est un élément.

D'une manière plus générale, il est permis d'affirmer qu'une inférence

d'une formule b à partir d'une suite de formules $a_1, .. , a_n$

est incorrecte si, au cours de cette inférence, on a dérivé

une des prémisses, a_i, en utilisant non seulement a_i mais une ou plusieurs autres prémisses.

En effet, supposons que l'on ait déduit d'abord

a_i à partir de a_1 et de a_i

(en se servant de chacune des deux prémisses a_i et a_1) et que l'on ait inféré ensuite

c à partir de a_i.

Dans ce cas, le rôle que joue la prémisse a_1 est totalement superflu. Les choses se passent comme si cette prémisse n'avait pas été utilisée effectivement au cours de la déduction de c.

En dérivant de cette manière

c à partir de $a_1, .. ,a_n$,

on fait un détour entièrement inutile. On infère a_i à partir de a_i et de a_1 et c à partir de a_1, alors qu'il suffirait de déduire c à partir de a_i.

Voici un exemple d'une inférence de ce genre :

p ---) p	1re prémisse
p	2de prémisse
p	formule dérivée à partir des deux prémisses au moyen de la règle du modus ponens
p v q	formule déduite à partir de la précédante à l'aide de la règle $\frac{a}{a \vee b}$.

On fait un détour inutile en inférant de la sorte

p v q à partir des prémisses p ——) p et p

puisqu'il est possible de dériver

p v q à partir de la prémisse p

au moyen de la règle

$$\frac{a}{a \vee b}$$

sans recourir à la prémisse p ——) p.

Cette inférence permet de prouver dans le système E′ la formule

(3) : (p ---) p) ---) (p ---) (p v q))

qui affirme qu'

il suit logiquement, de ce que
p l-imp p, que p l-imp p ou q.

Or, il est douteux que le fait que

q l-imp p

compte, parmi ses conséquences logiques, le fait que

p l-imp p ou q.

Il est d'autres déductions qui sont admises dans le système E′ mais qui ne sont pas correctes.

Tel est le cas de l'inférence suivante :

p –––) (p v q)		1re prémisse
	(p v q) –––) (p v q)	2me prémisse
	p	3me prémisse
	p v q	formule dérivée à partir de la 1re et de de la 3me prémisse au moyen de la règle du modus ponens
	p v q	formule déduite à partir de la précédante et de la 3me prémisse à l'aide de la même règle.

Cette inférence permet de démontrer la formule

(4) : (p –––) (p v q)) –––) (((p v q) –––) (p v q)) –––) (p –––) (p v q)))

qui présente une certaine analogie avec une loi « paradoxale » du calcul classique des propositions, la formule

(5) : $p \supset (q \supset p)$.

Le caractère incorrect de la déduction est dû au fait qu'elle *contient* une inférence explicite [8]

de p v q à partir de p –––) (p v q) et de p,

c'est-à-dire, à partir de la première et de la troisième prémisse.

La deuxième prémisse,

(p v q) –––) (p v q),

intervient dans la déduction

de p v q à partir de p –––) (p v q),
de (p v q) –––) (p v q) et de p,

mais son rôle y est entièrement superflu. Ici encore, les choses se passent comme si une des prémisses n'avait pas été utilisée effectivement au cours de l'inférence.

On peut, d'une manière plus générale, affirmer ce qui suit :

Soit une déduction

(8) Une inférence qui est effectuée d'une façon tout à fait explicite au moyen des règles de déduction du système E'.

d'une formule b à partir d'une suite de formules $a_1, .. ,a_n$

(au cours de laquelle il a été fait usage de chacune des prémisses $a_1, .. ,a_n$).
Cette déduction est incorrecte si elle contient une inférence

de la formule b à partir d'une sous-suite (stricte) de la suite des prémisses $a_1, .. ,a_n$.

Voici un autre exemple d'une déduction de cette espèce :

(p v q) ---) (q v p)		1re prémisse
(q v p) ---) (p v q)		2me prémisse
	p	3me prémisse
	p v q	formule dérivée à partir de la 3me prémisse au moyen de la règle $\frac{a}{a \vee b}$
	q v p	formule déduite à partir de la précédante et de la 1re prémisse à l'aide de la règle du modus ponens
	p v q	formule inférée à partir de la précédante et de la 2me prémisse au moyen de la même règle.

Cette déduction, qui permet de prouver la formule

(6) : ((p v q) ---) (q v p)) ---)
(((q v p) ---) (p v q)) ---)
(p ---) (p v q)))

dans le système E′, est incorrecte parce qu'elle contient une inférence explicite

de p v q à partir de p,

c'est-à-dire, à partir de la troisième prémisse.

III

Si les remarques que nous venons de faire sur le système E′ sont fondées, la systématisation d'un ensemble suffisamment riche de propositions logiquement vraies ou de procédés de déduction devient une tâche particulièrement complexe.

Il conviendrait tout d'abord de renoncer à l'emploi de variables (propositionnelles ou prédicatives). Montrons-le par un exemple.

La formule

(1) : (q ---) r) ---) ((p ---) q) ---) (p ---) r))

est un axiome important du système E (et un théorème du système E′).

Les variables p, q et r que contient cette formule figurent, bien entendu à la place de propositions tout à fait quelconques.

Si l'on y substitue un même énoncé, B, à chacune des variables, on obtient la proposition qui suit :

(2) : De ce que B l-imp B, il suit logiquement que B l-imp B suit logiquement de ce que B l-imp B.

Mais il est plus que douteux que l'énoncé

(3) : De ce que B l-imp B, il suit logiquement que B l-imp B

soit une conséquence logique de la proposition

(4) : B l-imp B

Si l'on tente de prouver l'énoncé (2) en recourant à des procédés d'inférence aussi naturels que possible, et donc proches de ceux qui sont appliqués dans le système E′, on ne parvient qu'à effectuer des déductions incorrectes. Ainsi, lorsqu'on dérive

B à partir de la suite des prémisses B l–imp B, B l–imp B, B,

en se servant à deux reprises de la règle du modus ponens, on utilise chacune des deux prémisses, mais on effectue aussi une inférence qui contient une déduction

de B à partir de B l–imp B et de B,

c'est-à-dire, à partir d'une sous-suite (stricte) de la suite initiale des prémisses.

La proposition (2) est fausse et de ce fait la formule (1) ne constitue pas une loi logique. Or, il est possible de démontrer cette formule dans le système E′ en effectuant une inférence qui est à l'abri de tous reproches mais dont les prémisses et la conclusion sont soit des variables soit des formules dans lesquelles figurent des variables : celle

de r à partir de q ---) r, de p ---) q et de p.

Bien que la formule (1) ne soit pas une loi logique, il est un grand nombre d'énoncés qui ont la même forme qu'elle et qui sont logiquement vrais.

Il est vain, par conséquent, de tenter de systématiser un groupe important de procédés de déduction ou de propositions logiquement vraies en recourant à des variables (propositionnelles ou prédicatives).

Il conviendrait de construire (au niveau propositionnel) un système qui serait analogue au système E′ mais dont les formules atomiques seraient des expressions ayant la fonction de constantes et figurant à la place d'énoncés atomiques d'une langue naturelle ou d'une théorie scientifique.

Il conviendrait également d'imposer à l'une des principales règles de déduction d'un tel système, la règle d'introduction de l'opérateur de l'implication, les restrictions dont il a été question plus haut et sans doute d'autres encore.

Les inférences qu'on effectuerait dans ce système permettraient de prouver la déductibilité de telle ou telle formule particulière à partir de telle ou telle suite de formules particulières. Toutefois, ces inférences ne permettraient pas de conclure, dans la totalité des cas, à l'existence de procédés de déduction universellement applicables.

Un exemple illustrera ceci. Dans le système en question, on pourrait démontrer que la formule

(4) : (p ---) q) ---) (p ---) r)

est dérivable à partir de la formule

(5) : q ---) r [9].

Mais cette preuve ne constituerait en aucune façon une démonstration de l'énoncé qui suit :

(6) : Pour toute proposition A, pour toute proposition B et pour toute proposition C,
(A 1–imp B) 1–imp (A 1–imp C)
est déductible à partir de
B 1–imp C.

En effet, nous l'avons vu, l'énoncé

(7) : (A 1–imp A) 1–imp (A 1–imp A)

n'est pas une conséquence logique de la proposition

(8) : A 1–imp A.

On pourrait peut-être se servir de l'inférence de la formule (4) à partir de la formule (5) pour prouver l'énoncé suivant :

(9) : Quelles que soient les propositions A, B et C, si ces propositions sont distinctes l'une de l'autre, alors

(9) Nous supposons que les expressions
p, q, r, ...
sont les formules atomiques de ce système.

(A l–imp B) l–imp (A l–imp C)

est déductible à partir de

B l–imp C.

En d'autres mots, on pourrait peut-être, après avoir dérivé (4) à partir de (5), démontrer l'existence d'un procédé d'inférence qui est du même type que la déduction de (4) à partir de (5) et qui, sans être universellement valable, est néanmoins d'une portée plus générale.

Mais serait-il permis, au terme d'inférences plus complexes que celle de (4) à partir de (5), de procédér à une généralisation de cette sorte?

Ce n'est nullement certain. Supposons en effet que l'on ait dérivé la formule

b

à partir de la formule

a

et supposons aussi que les lettres p et q (jouant le rôle de constantes propositionnelles) figurent dans a, dans b et dans diverses formules de la déduction.

Il n'est pas impossible qu'on transforme cette inférence en une déduction incorrecte si on substitue aux expressions p et q, partout où elles figurent, deux énoncés qui, bien que différents l'un de l'autre, contiennent un ou plusieurs opérateurs.

Nombreuses seraient en tout cas les inférences dont il conviendrait de prouver que des substitutions de ce genre ne les transforment pas en des déductions incorrectes.

IV

La systématisation d'un groupe suffisamment riche de propositions logiquement vraies ou de procédés d'inférence soulève donc des problèmes particulièrement ardus.

Il n'a été fait allusion ici qu'à quelques uns de ces problèmes. Il en est d'autres bien entendu, et notamment ceux que posent les procédés de déduction dans lesquels intervient la locution « si, alors» utilisée, pour établir, entre deux expressions, un rapport distinct du rapport de nécessité logique.

C'est la raison pour laquelle il est préférable, dans l'état actuel des choses, de se servir de la logique classique pour étudier les propriétés des théories mathématiques.

Les procédés d'inférence appliqués au cours d'une démonstration mathématique ont des aspects qui sont encore mal connus. L'étude de cette réalité très complexe qu'est un système ou une théorie mathématique ne peut se faire qu'en la schématisant plus ou moins fortement.

Un des moyens de parvenir à une telle schématisation consiste à substituer aux systèmes mathématiques naturels des systèmes formalisés à l'aide de la logique classique.

On obtient donc, si l'on substitue le système S', formalisé au moyen de la logique classique, au système mathématique naturel S une sorte de représentation schématique de S. L'implication matérielle (qui joue un rôle important dans S') doit être conçue comme un élément essentiel de cette représentation.

Les règles de déduction du système S' sont beaucoup plus simples que celles du système S. Entre l'opérateur de l'implication matérielle qui est employé dans S' et la locution « si, alors » qui est utilisée dans S, la correspondance n'est qu'approximative.

L'ensemble des théorèmes de S ne se confond pas avec l'ensemble des théorèmes de S'. En effet, si B est démontrable dans S, alors toutes les formules de S' qui ont la forme

$$a \supset B$$

sont prouvables dans S'. Mais parmi les expressions de S qui se présentent sous la forme

Si a, alors B,

il en est qui ne sont pas des théorèmes de S.

Toutefois, malgré la différence qui sépare le symbole de l'implication matérielle de la locution « si, alors », les rapports entre les théorèmes de S et ceux de S' sont assez étroits [10] pour que certains ou peut-être même la plupart des résultats portant sur le système S' puissent être étendus au système S.

Quels sont exactement ces résultats? Il s'agit là d'un problème qui mériterait d'être examiné.

S. Issman

(10) La règle qui permet de dériver dans S' une formule de la forme

$$a \,.\, -b$$

à partir d'une formule de la forme

$$-(a \supset b)$$

n'est pas appliquée aux théorèmes de S simplement parce que S ne contient aucun théorème de la forme

non (si a, alors b).